LFSAB 1504 - Mission 1
Réponse dynamique d'une suspension pneumatique

1 Introduction

La première mission consiste à modéliser une suspension pneumatique et simuler sa réponse dynamique. Sur ce type de suspension, les ressorts hélicoïdaux sont remplacés par une membrane en caoutchouc contenant de l'air sous pression, constituant ainsi un véritable *coussin d'air*. Outre un très bon confort, les suspensions pneumatiques permettent d'adapter la raideur et la hauteur de la suspension en fonction des charges transportées ou du type de route parcourue. L'ajout d'un réservoir d'air additionnel connecté au coussin permet d'en améliorer davantage les propriétés de confort. Elles sont donc utilisées très couramment pour les trains de passagers, les camions, les bus, certains SUV, ... Leur complexité (compresseur, vannes, tuyauterie, risque de panne, ...) et leur coût en limite toutefois l'usage sur d'autres types d'automobiles.

Cette mission aura pour objectif de revoir le principe d'un intégrateur numérique basique et de vous réapproprier les concepts de base de la programmation en C, sur la base d'une application concrète dans le domaine de la mécanique.

Pour cette mission, nous allons considérer un coussin pneumatique connecté à un réservoir auxiliaire par une conduite d'une longueur fixée. Le but sera de calculer la force de réaction de la suspension lorsqu'elle est soumise à une excitation en déplacement de fréquence variable.

FIGURE 1 – Illustration d'un train de suspension de camion équipé d'un coussin pneumatique (Image de www.hendrickson-intl.com).

2 Modèle d'une suspension pneumatique en circuit fermé

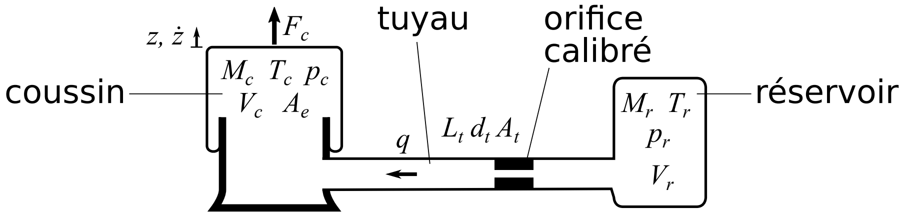

FIGURE 2 – Illustration du système à modéliser : un coussin pneumatique est connecté à un réservoir auxiliaire par un tuyau.

Le système à étudier est composé d'un coussin pneumatique connecté à un réservoir auxiliaire par un tuyau (Fig. 2). Ce dernier peut se composer de plusieurs sections raccordées par des coudes et être muni d'un orifice calibré visant à augmenter les pertes de charge pour accroître l'amortissement de la suspension.

Coussin pneumatique

On suppose d'abord que la force de réaction du coussin F_c ne dépend que de la pression interne p_c, la membrane en caoutchouc n'opposant aucune résistance au mouvement. La force de réaction du coussin s'exprime alors comme suit :

$$F_c = A_e(p_c - p_a)$$

avec p_a la pression atmosphérique et A_e l'aire effective. Celle-ci est une surface fictive reliant la pression dans le coussin à la force de réaction de ce dernier. On la supposera constante par la suite.
En supposant que les transformations dans le coussin sont isentropiques et que l'air qui y entre depuis le tuyau est à la température du coussin T_c, l'équation des gaz parfaits peut être dérivée pour obtenir l'équation suivante qui régit l'évolution de la pression [1] :

$$\dot{p}_c = \frac{\gamma}{V_c}(RT_c q - p_c \dot{V}_c)$$

avec γ le coefficient adiabatique, R la constante spécifique de l'air (constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire de l'air), q le débit massique entrant dans le coussin depuis la conduite, T_c la température de l'air dans le coussin, V_c le volume du coussin.
Dans le cas qui nous intéresse, nous pouvons considérer que le volume du coussin ne dépend que de son écrasement (et pas de la pression) et on peut l'assimiler à un cylindre de section constante et de hauteur variable. Le volume varie donc linéairement :

$$V_c = V_{c0} + \frac{dV_c}{dz} z = V_{c0} + A_e z$$

et donc

$$\dot{V}_c = \frac{dV_c}{dz}\dot{z} = A_e \dot{z}$$

1. Un point au-dessus d'une variable dénote sa dérivée temporelle : $\dot{f} = \frac{df}{dt}$.

avec V_{c0} le volume initial du coussin, z l'écrasement du coussin et $\dot{z}$ la vitesse d'écrasement. Les grandeurs z et $\dot{z}$ seront imposés au système comme des fonctions du temps connues.
L'évolution de la masse d'air dans le coussin M_c s'obtient simplement en considérant la conservation de la masse :

$$\dot{M}_c = q$$

Enfin, pour trouver la température T_c de l'air dans le coussin, on considère l'équation des gaz parfait :

$$T_c = \frac{p_c V_c}{M_c R}$$

Réservoir auxiliaire

Le même raisonnement s'applique pour le réservoir (même grandeur que le coussin avec l'indice r à la place de l'indice c). En tenant compte que son volume est constant et qu'un débit q positif (débit entrant dans le coussin) correspond à un débit sortant, on obtient :

$$\dot{p}_r = -\frac{\gamma}{V_r} R T_r q$$

$$\dot{M}_r = -q$$

$$T_r = \frac{p_r V_r}{M_r R}$$

Conduite et orifice calibré

Enfin, pour déterminer le débit q qui s'écoule dans la conduite, on suppose un écoulement unidimensionnel et incompressible, ce qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\dot{q} = \frac{A_t}{L_t}\left((p_r - p_c) - \frac{1}{2\rho_t A_t^2}\left(\frac{\lambda L_t}{d_t} + \xi\right) q^2 sign(q)\right)$$

avec A_t la section du tuyau, L_t sa longueur, d_t son diamètre, ρ_t la masse volumique de l'air qu'il contient, supposée constante et égale à la masse volumique initiale de l'air, λ et ξ les coefficients de pertes de charge réparties et singulières caractérisant les dissipations dans l'écoulement.

3 Mission

Le comportement dynamique de la suspension est donc décrit par un système d'équations différentielles. Les inconnues à intégrer sont reprises dans le vecteur d'état suivant :

$$x = \begin{pmatrix} q \\ p_c \\ M_c \\ p_r \\ M_r \end{pmatrix}$$

Les conditions initiales du problème et les paramètres du modèle pourront être déterminés à partir du tableau suivant.

Volume initial du coussin	V_{c0}	$4\ dm^3$
Aire effective	A_e	$0.018\ m^2$
Volume du réservoir	V_r	$7\ dm^3$
Longueur du tuyau	L_t	$5\ m$
Diamètre du tuyau	d_t	$12\ mm$
Coefficient adiabatique	γ	1.4
Constante spécifique de l'air	R	$287.1\ J/kg/K$
Pression initiale	p_0	$4\ bar$
Pression atmosphérique	p_a	$1\ bar$
Température atmosphérique	T_a	$293\ K$
Coefficient de pertes de charge		
réparties	λ	0.012
singulières	ξ	2.5

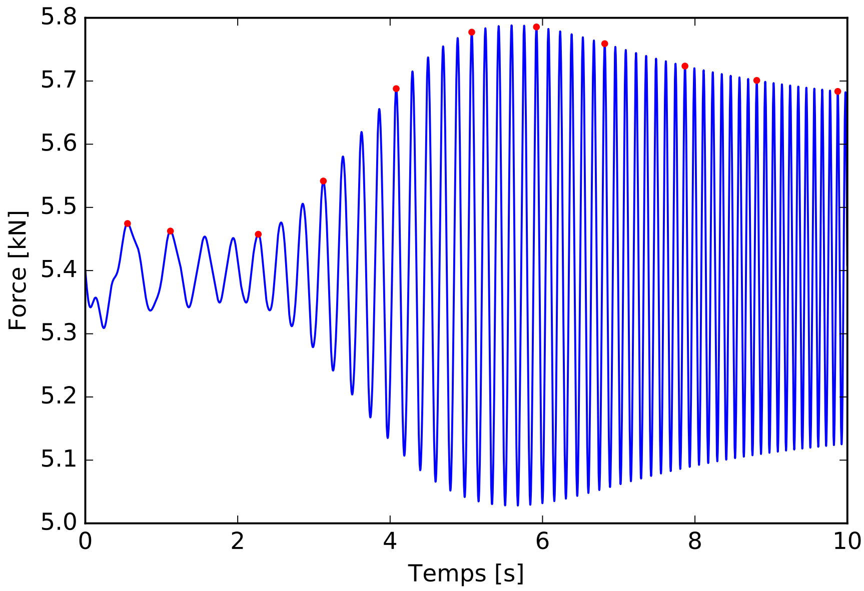

FIGURE 3 – Evolution temporelle de la force de réaction du coussin pour une excitation dont la fréquence augmente avec le temps. Les points rouges illustrent les points de passage présents dans le fichier de résultats partiels donné.

Il vous est demandé d'écrire un programme capable de calculer la force de réaction du coussin (Fig. 3) entre $t_0 = 0\ s$ et $t_1 = 10\ s$ lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale de fréquence croissante fournie par l'équation suivante :

$$z(t) = z_{max}\ sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0}\frac{t}{2}\right)t\right)$$

avec $z_{max} = 5\ mm$, $f_0 = 1\ Hz$ en $t_0 = 0\ s$ et $f_1 = 10\ Hz$ en $t_1 = 10\ s$.

Pour ce faire, vous veillerez à respecter les contraintes suivantes.

- Votre programme sera écrit en langage C (et pas C++ !)
- Vous utiliserez un schéma d'intégration d'*Euler explicite* avec un pas de temps fixe $h = 0.1\ ms$.
- Votre programme se conformera à l'interface définie par le fichier `susp_pneuma.h`. (ce fichier ne pourra en rien être modifié)
- Le programme sera lancé par la fonction `main` du fichier `main.c` fourni (ne modifier que la fonction `main`, ne pas modifier les inclusion de fichier `.h`).
- Les résultats de votre intégration numérique seront enregistrés à chaque pas de temps dans un fichier texte nommé `susp_pneuma.res`. Les valeurs seront encodées dans les unités du système international avec au moins huit chiffres significatifs, séparées par des espaces et structurées comme suit :

t_0	x1_0	x2_0	x3_0	x4_0	x5_0	Fc_0
t_1	x1_1	x2_1	x3_1	x4_1	x5_1	Fc_1
t_2	x1_2	x2_2	x3_2	x4_2	x5_2	Fc_2
...						
t_n	x1_n	x2_n	x3_n	x4_n	x5_n	Fc_n
...						
t_f	x1_f	x2_f	x3_f	x4_f	x5_f	Fc_f

- Votre programme sera composé des fichiers suivants :
  - `CMakeLists.txt` : fichier de configuration pour la compilation (ne pas modifier, voir les instructions pour la compilation par ailleurs),
  - `susp_pneuma.h` : fichier d'interface fourni (ne pas modifier),
  - `susp_pneuma.c` : fichier d'implémentation du modèle et de la simulation (modèle fourni à modifier),
  - `main.c` : fichier définissant la fonction `main` qui permet de lancer la simulation (modèle fourni à modifier).

  Le fichier `susp_pneuma.zip` disponible sur Moodle contient les modèles de ces fichiers. Il reprend en outre le fichier `force_points.res` qui contient les coordonnées des points rouges tracés sur la Figure 3.
- Une fois votre programme fonctionnel, vos fichiers `susp_pneuma.c` et `main.c` seront encodés sur la plateforme INGInious qui se chargera de réaliser une série de tests automatiques sur votre code (compilation, exécution, validation de la solution, analyse de l'utilisation mémoire, ...). Voyez les indications pratiques à la section 4.2.
- En bonus, vous ferez varier quelques paramètres de simulation et répondrez aux deux questions posées sur INGInious.

4 Informations utiles

4.1 Comment tracer vos graphes de solutions ?

Afin de vérifier par vous même vos résultats, vous pourrez tracer des graphes à partir du fichier de résultats en vous inspirant des scripts ci-dessous. Pensez à bien préciser les légendes et unités des courbes et des axes.

en Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

sol = np.loadtxt('susp_pneuma.res')
ref = np.loadtxt('force_points.res')

plt.figure(figsize=(7, 4.5))
plt.plot(sol[:,0], sol[:,6])
plt.plot(ref[:,0], ref[:,1], 'r.')
plt.xlabel('Temps [s]')
plt.ylabel('Force [N]')
plt.legend(['Solution du programme',
            'Reference'],
            loc=3)
plt.show()
```

en Matlab

```
sol = load('susp_pneuma.res');
ref = load('force_points.res');

figure();
plot(sol(:,1), sol(:,7))
hold on
plot(ref(:,1), ref(:,2),'r.')
xlabel('Temps [s]')
ylabel('Force [N]')
legend({'Solution du programme',
    'Reference'},
   'Location','southwest')
```

4.2 Quelques instructions pour utiliser INGInious ?

Le code écrit dans le cadre de la mission 1 est à soumettre sur la plateforme *INGInious* en suivant les étapes décrites ci-dessous.

- Connectez-vous à l'adresse `https://inginious.info.ucl.ac.be` .
- Identifiez-vous en utilisant l'option UCL (et pas INGI).
- Utilisez votre identifiant global UCL comme identifiant sur la plateforme INGInious.
- Inscrivez-vous au cours `[LFSAB1504] Projet 4 en mécanique`.
- Inscrivez-vous dans votre sous-groupe dont le numéro vous aura été précisé par l'équipe enseignante.
- Accédez à la `Mission 1: Modélisation d'une suspension pneumatique`.
- Copiez/collez le code de vos fichiers `susp_pneuma.c` et `main.c` dans les zones de texte appropriées.
- En option, répondez aux deux questions bonus.
- Cliquez sur `Soumettre` pour envoyer la solution au serveur et obtenir la correction de votre exercice.

Notez qu'il n'y a pas de limite sur le nombre de soumissions. Si votre code ne produit pas le bon résultat, vous pouvez ré-essayer.